MAT - Cours du 07.12.2020

lundi, 7 décembre 2020 08:02

Chiffrement : Le nombre de César

Considéré comme le premier algorithme de chiffrement

Définit un "nombre" *N* de 1 à 25 et on "encode" un message via un décalage de "*N*" lettres dans l'alphabet.

A	B	C	D	...	...	...	X	Y	Z
C	D	E	...	...	...	...	Z	A	B

$N=2$

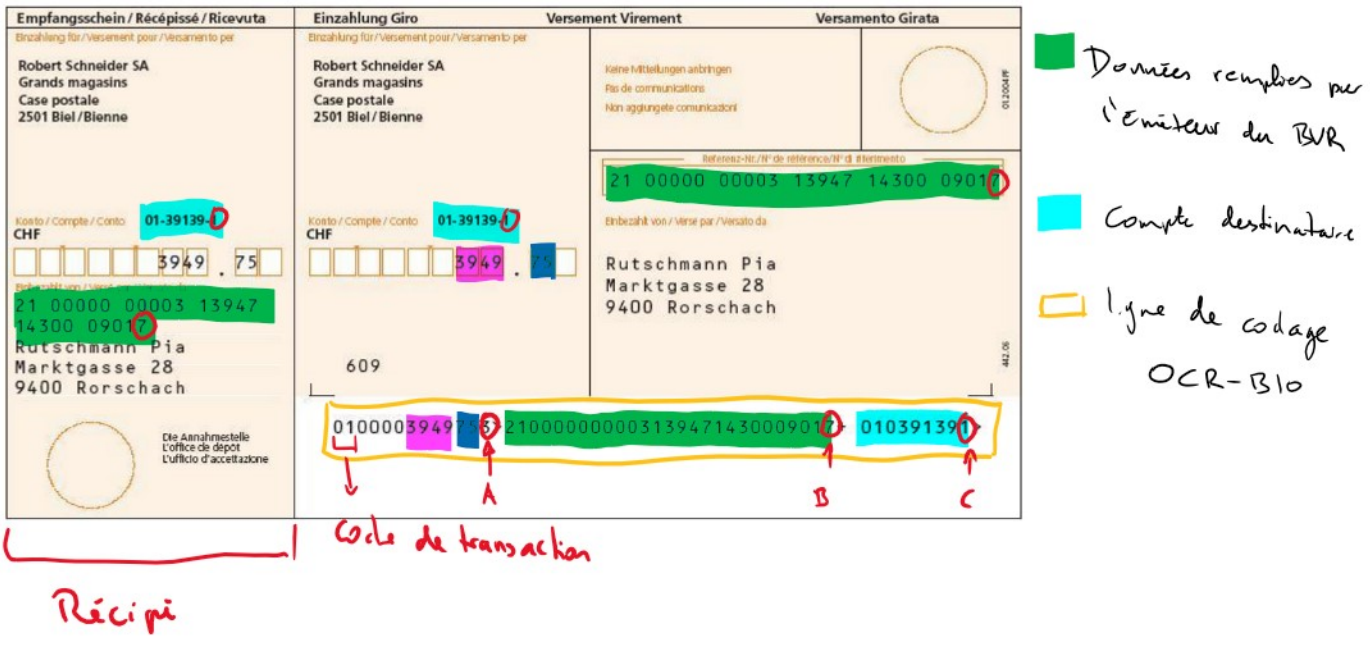
Mathématiquement, qu'est-ce que cela nous donne ?

Si on a une lettre i, elle par j = $i + N \mod 26$ $(N=2)$

Et pour le déchiffrer :

$$i = j - N \mod 26 = (j + 26 - N) \mod 26 \quad \begin{pmatrix} -2 \\ +24 \end{pmatrix}$$

Bulletin de versement



A B et C sont des "check Sum"

A,B et C permettent de vérifier que les informations soient cohérentes !

Ils sont calculés avec l'algorithme mod 10 récursif (c.f. polycop).

LE RSA

Rivest, **S**hamir et **A**dleman (breveté en 1977 au MIT).

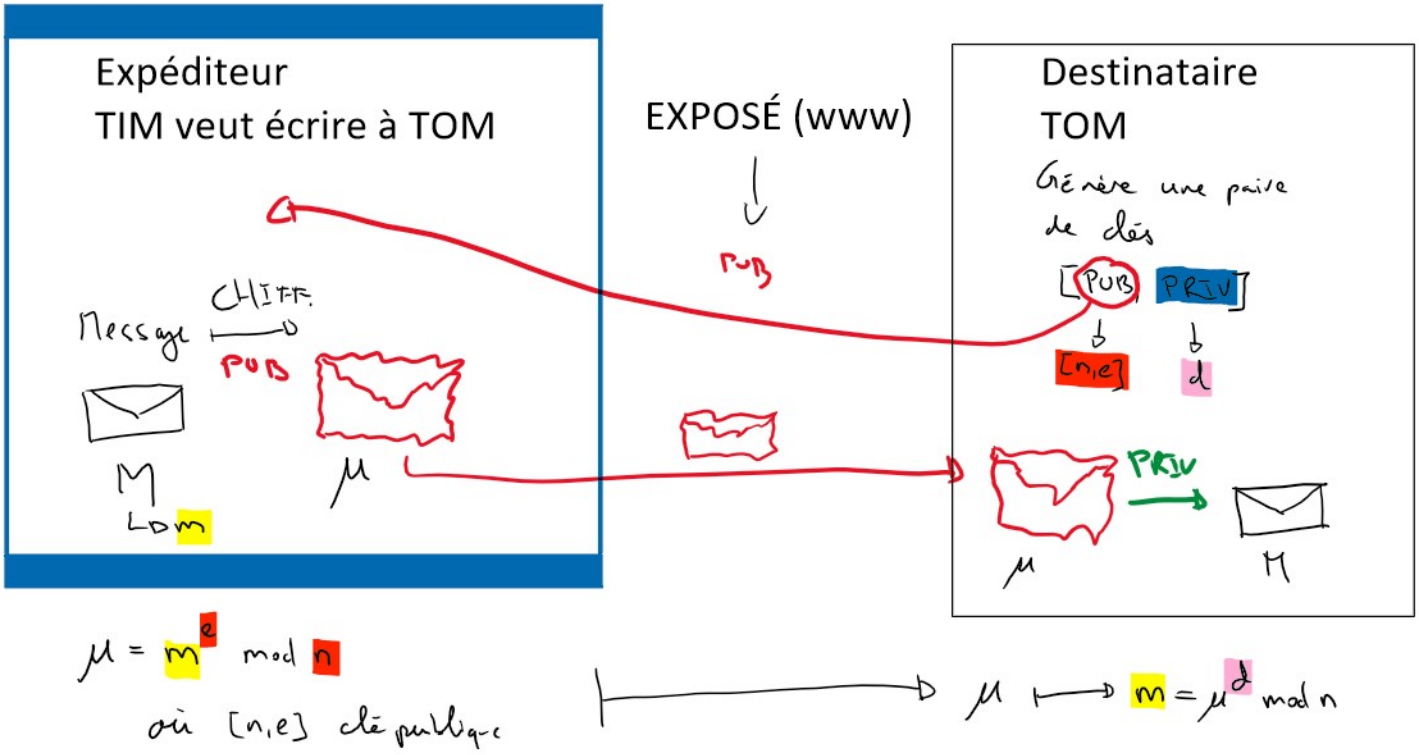
C'est un chiffrement ASYMÉTRIQUE, contrairement au Nombre de César qui est SYMÉTRIQUE.

Car il y a une notion de "paires de clés", une clé PUBLIQUE, et une clé PRIVÉE.

Symétrique : la clé de chiffrement ET de déchiffrement est la même !!!
Risque => si on connaît la clé, le message est compromis !

Asymétrique : la clé publique est utilisée pour ENCODER (chiffrer) le message, alors que la clé privée est utilisée pour le DÉCODER (déchiffrer). Seule la clé publique est transmise, mais le message n'est PAS compris car seule la clé PRIVÉE permet de déchiffrer le message !!!!

Principe du RSA



$\mu = m^e \mod n$

où $[n,e]$ clé publique

$\mu \longmapsto m = \mu^d \mod n$

M message d'origine (texte) => on le convertit en "nombre" m
(p.ex. représentation ASCII sur 16 bits)

⚠ m, n, e, μ et $d \in \mathbb{N}$.

$m < n$

Question : comment Tom (destinataire) doit-il choisir n, e et d ???

Tout repose sur 2 nombres premiers *p* et *q* !

Que fait Tom (destinataire)

1. Génère aléatoirement 2 nombres premiers p et q (premiers entre eux, $p \neq q$)
2. $n = p \times q$
3. Calcule $\varphi(n) = \varphi(p \cdot q) = (p-1) \cdot (q-1)$
4. Choisit e tel que $PGCD(e, \varphi(n)) = PGCD(e, (p-1)\cdot(q-1)) = 1$
5. On utilise Euclide étendu pour calculer les coeff. De Bézout

$$PGCD(e, \varphi(n)) = e \cdot x + \varphi(n) \cdot y = 1$$

$$PGCD(e, \varphi(n)) = e \cdot x + \varphi(n) \cdot y = 1$$

$$d = x \bmod \varphi(n)$$

Exemple :

Choisissons p et q $\quad p = 5 \quad , \quad q = 11$

1. $p = 5, \quad q = 11$
2. $n = 5 \cdot 11 = 55$
3. $\varphi(n) = (p-1) \cdot (q-1) = 4 \cdot 10 = 40$
4. $e = 7$ (car $PGCD(7, 40) = 1$)
5. $1 = 7 \times (-17) + 40 \times 3$

$$d = -17 \bmod 40 = 23$$

Que fait Tim (expéditeur)

"Bonjour" $\xrightarrow{\text{"ASCII"}}$ 13

M => (ascii)... m = 13

$$\mu = m^e \bmod n = 13^7 \bmod 55 = 7$$

Du côté de TOM :

$$\mu \mapsto m = \mu^d \bmod n = 7^{23} \bmod 55 = 13 \xrightarrow{\text{"ASCII"}} \text{"Bonjour"} !$$